

GIỚI HẠN HÀM SỐ (BUỔI 1)

A. Kiến thức cần nắm:

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

a. Định nghĩa: SGK/124

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu:

Với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Chú ý: Khoảng K viết chung cho các khoảng (a, b) , $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ hoặc $(-\infty, +\infty)$.

Ví dụ 1. Cho hàm số: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Dùng định nghĩa chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$

Giải:

- TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Giả sử (x_n) là dãy số bất kỳ, $x_n \neq -1$ và $\lim x_n = -1$.
- Ta có: $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 1}{x_n + 1} = \lim \frac{(x_n + 1)(x_n - 1)}{x_n + 1} = \lim (x_n - 1) = -2$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$.

***Nhận xét:** $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, $\lim_{x \rightarrow c} c = c$ (c : hằng số)

b. Định lý: SGK/125

i) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$)

ii) Nếu $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}$ thì $\begin{cases} L \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L} \end{cases}$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 3x + 1) & b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 3x - 7}{x - 5} & c) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x^2 + 1} - x + 1) \\ d) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt[3]{x - 3}}{x^3 - 4x + 10} & e) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} |x^2 - 3| & f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x^3 \sin x - 2 \cos x) \end{array}$$

Giải:

$$\begin{array}{l} a) \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -3} x^2 + \lim_{x \rightarrow -3} 3x + \lim_{x \rightarrow -3} 1 = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 1 = 1 \\ b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 3x - 7}{x - 5} = \frac{2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 7}{3 - 5} = -10 \\ c) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x^2 + 1} - x + 1) = \sqrt{2 \cdot 2^2 + 1} - 2 + 1 = 2 \\ d) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt[3]{x - 3}}{x^3 - 4x + 10} = \frac{\sqrt[3]{-4 - 3}}{(-4)^3 - 4(-4) + 10} = \frac{\sqrt[3]{-7}}{38} \\ e) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} |x^2 - 3| = |(\sqrt{2})^2 - 3| = |-1| = 1 \\ f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x^3 \sin x - 2 \cos x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{8} \cdot 1 - 2 \cdot 0 = \frac{\pi^3}{8} \end{array}$$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{llll} a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} & c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} & d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 3x - 2} \end{array}$$

Giải:

$$\begin{array}{l} a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2 \\ b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(\sqrt{x} + \sqrt{5})(\sqrt{x} - \sqrt{5})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 6)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 6) = 7 \end{array}$$

Cách phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc 2:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Trong đó: $a \neq 0$

x_1, x_2 là hai nghiệm của $ax^2 + bx + c = 0$.

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{-12}{5}$$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x - 1}$$

Giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-1)(x-2)} = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2$$

Cách phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc 3 (dùng được cho bậc n):

Sử dụng sơ đồ Horner:

1	-3	5	-3
1	1	-2	3
			0

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x-1)(x^2 - 2x + 3)$$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{7+x}-3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-6x+8}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}$$

Giải:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{7+x}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}{(\sqrt{7+x}-3)(\sqrt{7+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}{7+x-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{7+x}+3) = 6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-6x+8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x-4)(x-2)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+9-25}{(x-4)(x-2)(\sqrt{x^2+9}+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{(x-4)(x-2)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(x-2)(\sqrt{x^2+9}+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{(x-2)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt[3]{1-x}) \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)}{3x \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x)}{3x \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \left(1 + \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right)} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x+5}+3)} = \frac{2}{3}$$

Phương pháp tính giới hạn hàm số dạng $\frac{0}{0}$

* Nếu biểu thức không chứa căn: phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách sử dụng hằng đẳng thức, sơ đồ horner,...

* Nếu biểu thức chứa căn: nhân lượng liên hiệp (liên hiệp bậc 2, bậc 3)

$\Rightarrow$ Rút gọn nhân tử tạo ra dạng $\frac{0}{0}$ (thường là rút gọn $x - x_0$).

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$$

Giải:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 + 1 - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x \left[(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} + 1} = \frac{1}{3} (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2} (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \text{ suy ra: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Hướng dẫn câu b:

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt[3]{8x+11}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3 + 3 - \sqrt[3]{8x+11}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{3 - \sqrt[3]{8x+11}}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x^2 + 3x - 8)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x - 7}{2x^2 - 4x + 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4x - 6} + 2x}{x + 4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{x^4 + 4x^2 - 6}{3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2 + 4} - x}{x + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{|2x^2 - 9|}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + 2 \tan x}{x + 1}$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 - x - 12}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 9x - 13}{x - 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^3 + 5x^2 - 5x - 3}{x^3 - 9x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{x - 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

$$i^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2+3}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^2+3} - 2}$$

$$j^*) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})(1 - \sqrt[4]{x})(1 - \sqrt[5]{x})}{(1 - x)^4}$$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2 - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$$